# UNA PROPUESTA DIDÁCTICA VINCULADA A LA ESCRITURA Y CÁLCULO EN LÓGICA PROPOSICIONAL

José I. Gómez[1]; Elsa del V. Ibarra [2]

[1]Facultad de Agronomía y Agroindustrias, Universidad Nacional de Santiago del Estero, Argentina.

[2]Facultad de Ciencias Forestales. Universidad Nacional de Santiago del Estero, Argentina.

jgomez@unse.edu.ar, egomez@unse.edu.ar

## Resumen

Presentamos una propuesta didáctica vinculada a la escritura del valor de verdad de las proposiciones y a la manera de operar con ellas, sin emplear tablas de verdad, sobre las mismas bases semánticas y sintácticas del Cálculo Proposicional. Los valores de verdad de una proposición simple se escriben con subíndices que indican la cantidad de veces que aparece dicho valor. Se introduce el término "valoricidad" como adaptación del término *atomicidad* que se emplea en química, para indicar en este caso, la cantidad de veces que aparece un valor de verdad. Se establece también una nueva manera de disponer las proposiciones para efectuar operaciones.

**Palabras clave**: Lógica proposicional; Propuesta pedagógica.

## Abstract

We present an educational proposal linked to the truth value writing of propositions and the way to operate with them, without using truth tables, on the same semantic and syntactic bases of Propositional Calculus.

The truth values of a simple proposition are written with subscripts indicating the number of times that value appears. It is introduced the term "valoricity" as atomicity adaptation of the term that is used in chemistry to indicate in this case, the number of times that a true value appears. It is also established a new way to perform propositional operations.

**Keyword:** Propositional logic; Pedagogical proposal.

## Presentación

Desde que Wittgenstein propusiera las tablas de verdad y luego, junto con Russell, divulgaron este método para determinar las condiciones de verdad de un enunciado, su uso se extendió y se aplicó por generaciones.

En el plano de la enseñanza, se puede plantear el desafío que consiste en ampliar las posibilidades de pensamiento o de estudio de los objetos de conocimiento, mediante otras formulaciones, sin dejar de lado modos tradicionales. De eso se trata este trabajo, vinculado a Lógica Proposicional.

Las nociones básicas de Lógica Proposicional forman parte, normalmente, de los contenidos de primer año de carreras de grado (ingeniería y ciencias económicas, por ejemplo), con asignaturas afines a la matemática. De allí que esta alternativa de trabajo que presentamos puede formar parte, junto con las tablas de verdad, de la praxis vinculada a este objeto de conocimiento.

## 1. Nuestra propuesta de escritura diferente para las proposiciones

Proponemos una nueva manera de escribir y realizar cálculos proposicionales, sin emplear tablas de verdad, sobre las mismas bases semánticas y sintácticas del Cálculo Proposicional.
Presentamos también una nueva manera de realizar los cálculos proposicionales, que dimos en llamar vertical-posicional, porque recuerda la forma de operar con números de varias cifras, al escribir una proposición con sus valores de verdad, debajo de otra proposición y efectuar el cálculo según la operación proposicional indicada.
Cuando se tienen dos proposiciones simples, $p$ y $q$, éstas se pueden escribir de la siguiente manera:
$p: VVFF = V_2F_2$, con $V$ y $F$, con "valoricidad" o cantidad de veces de cada valor de verdad dos cada uno, en ese orden, de tal modo que la suma de estas cantidades es el número de veces de valores de verdad que tiene la proposición, distribuidos en ese orden, de izquierda a derecha.
$q: VFVF = 2(VF)$, con dos veces $VF$ con valoricidad uno cada uno de estos valores de verdad.
En el caso de tres proposiciones, $p$, $q$ y $r$, sus escrituras en la nueva versión son:
$p: VVVVFFFF = V_4F_4$ la suma de las valoricidades de $V$ y $F$ da 8 que es el número de "filas" que tendría la asignación de valores de verdad de esta proposición, en ese orden, si se escribiera en una tabla de verdad.
$q: VVFFVVFF = 2(V_2F_2)$ la suma de las valoricidades de $V$ y $F$ da cuatro y multiplicado por el "coeficiente" 2 se obtienen las ocho posibilidades de $q$.
$r: VFVFVFVF = 4(VF)$ la suma de las "valoricidades" de $V$ y $F$ da dos y multiplicado por el "coeficiente" 4 se obtienen las ocho posibilidades de $r$.

### 2.1. Cálculo Proposicional

Se consignan ahora las operaciones proposicionales básicas, sobre las mismas bases semánticas de la Lógica Proposicional tradicional:
*La negación de la proposición* $p: VF$ es la proposición $\neg p: FV$
*La conjunción de las proposiciones* $p$ *y* $q$ es una proposición compuesta que se indica en la forma $p \wedge q$, que es verdadera sólo cuando las dos proposiciones son verdaderas; en otro caso es falsa.

$$\begin{array}{l} p: VVFF \\ q: VFVF \\ \hline \wedge: VFFF = VF_3 \end{array}$$

La conjunción es verdadera, valoricidad uno y falsa, valoricidad tres.
Este resultado podemos escribir también en la forma:
$p \wedge q : VF_3$, como también así: $\wedge(p,q) = VF_3$
Se puede leer como: la conjunción de $p$ y $q$ es $VF$ tres.
*La disyunción de las proposiciones* $p$ *y* $q$ es una proposición compuesta que es falsa únicamente cuando ambas proposiciones son falsas; en otro caso es verdadera.

$$\begin{array}{l} p: VVFF \\ q: VFVF \\ \hline p \vee q: VVVF = V_3F \end{array}$$

La disyunción es verdadera, valoricidad tres, y es falsa, valoricidad uno, en ese orden, de izquierda a derecha. Otras formas de consignar son:

$p \vee q : V_3F$ y $\vee(p,q) : V_3F$

Expresión que se puede leer en la forma siguiente: la disyunción de $p$ y $q$ es $V$ tres $F$.

*La implicación de las proposiciones* $p$ *y* $q$ es una proposición compuesta que es falsa sólo cuando la primera proposición, $p$, es verdadera y la segunda $q$ es falsa; es decir cuando se da: $VF$; en otro caso es verdadera.

$$\begin{array}{l} p : VVFF \\ \underline{q : VFVF \quad\quad} \\ \Rightarrow : VFVV = VFV_2 \end{array}$$

Resultado que se puede escribir también en las siguientes formas:

$\Rightarrow(p,q) : VFV_2$ y $p \Rightarrow q : VFV_2$

Su lectura es: la implicación de $p$ y $q$ es $VFV$ dos.

*El bicondicional o doble implicación de las proposiciones* $p$ *y* $q$ es una proposición compuesta que es verdadera cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad; en otro caso es falsa.

$$\begin{array}{l} p : VVFF \\ \underline{q : VFVF \quad\quad\quad\quad} \\ \Leftrightarrow : VFFV = VFFV = VF_2V \end{array}$$

El bicondicional es verdadero, valoricidad uno; falso, valoricidad dos y verdadero valoricidad uno, en ese orden de izquierda a derecha.

Este resultado se puede escribir como:

$\Leftrightarrow(p,q) : VFFV = VF_2V$ y $p \Leftrightarrow q : VFFV = VF_2V$

Se puede leer como: el bicondicional de $p$ y $q$ es $V\,F$ dos $V$.

*La disyunción excluyente de las proposiciones* $p$ *y* $q$ es una proposición compuesta que es falsa cuando las proposiciones tienen el mismo valor de verdad, y verdadera en otro caso.

$$\begin{array}{l} p : VVFF \\ \underline{q : VFVF \quad\quad} \\ \underline{\vee} : FVVF = FVVF \end{array}$$

Resultado que se puede escribir en las siguientes formas:

$\underline{\vee}(p,q) : FVVF$ y $p \underline{\vee} q : FVVF$

La disyunción excluyente es falsa valoricidad uno; verdadera valoricidad dos y falsa valoricidad uno, en ese orden de izquierda a derecha. Su lectura es: la disyunción excluyente de $p$ y $q$ es $FV$ dos $F$.

## 2. Acerca de la potencia de la escritura que proponemos

La escritura propuesta para los valores de verdad de las proposiciones es potencialmente fructuosa. Los nuevos resultados tales como la relación entre la disyunción excluyente y el bicondicional y la relación "complementaria" entre la conjunción y la disyunción, que se consignan a continuación, pueden ser más accesibles de reconocerlos.

### 3.1. Relación entre la disyunción excluyente y el bicondicional

Se escribe a continuación las funciones veritativas del bicondicional y de la disyunción excluyente para mostrar una particularidad:
*Bicondicional de* $p$ *y* $q$ *:* $VF_2V$
*Disyunción excluyente de* $p$ y $q$ : $FV_2F$
Se puede observar que la disyunción excluyente de las proposiciones $p$ y $q$ es igual a la negación del bicondicional y recíprocamente, el bicondicional de las proposiciones $p$ y $q$ es igual a la negación de la disyunción excluyente. Es decir:

$p \veebar q = \neg(p \Leftrightarrow q)$
$p \Leftrightarrow q = \neg(p \veebar q)$

**3.2. Relación "complementaria" entre la conjunción y la disyunción**

Si observamos las funciones veritativas de la conjunción y de la disyunción:

$\wedge(p,q): VF_3$
$\vee(p,q): V_3F$

se puede inferir que se da una especie de relación "complementaria" $(C)$ entre sus valores de verdad, en el sentido que se hay un "corrimiento" o "transferencia" de la valoricidad de un valor de verdad a otro, en su complementario:

$$C[\wedge(p,q)] = C(VF_3) = V_3F = \vee(p,q)$$
$$C[\vee(p,q)] = C(V_3F) = VF_3 = \wedge(p,q)$$

**4. Un ejemplo de aplicación de la escritura y cálculo propuestos**

Se considera ahora una situación vinculada a la actividad de evaluar *fórmulas bien formadas* (fbf), desde el punto de vista de las nociones de tautología, contingencia y contradicción.
En la nueva modalidad de escritura y de cálculo, se puede trabajar en la forma siguiente, con fórmulas que se presentan a modo de ejemplo:
**Evaluar:** $(\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge (p \wedge \neg q)$

**Respuesta**
Enumeramos los pasos a seguir:
1º) $\neg q \Rightarrow \neg p$
2º) $p \wedge \neg q$
3º) (1º) $\wedge$ (2º)

Evaluamos:
1º) $\neg q \Rightarrow \neg p : VFVV$ por ser la forma contrarecíproca de $p \Rightarrow q$
2º)

$$\begin{array}{r} p : VVFF \\ \neg q : FVFV \\ \hline \wedge : FVFF \end{array}$$

3º)

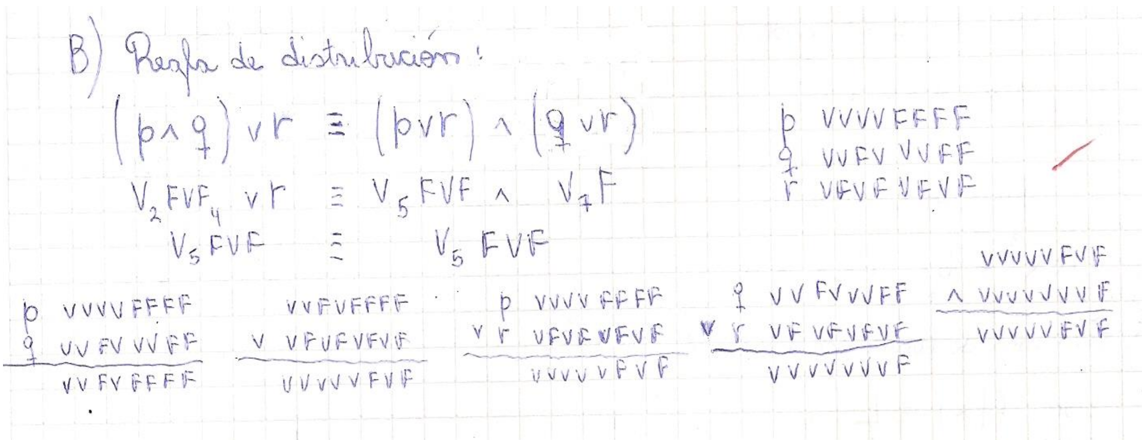
$(1^{o}): VFVV$

$(2^{o}): FVFF$

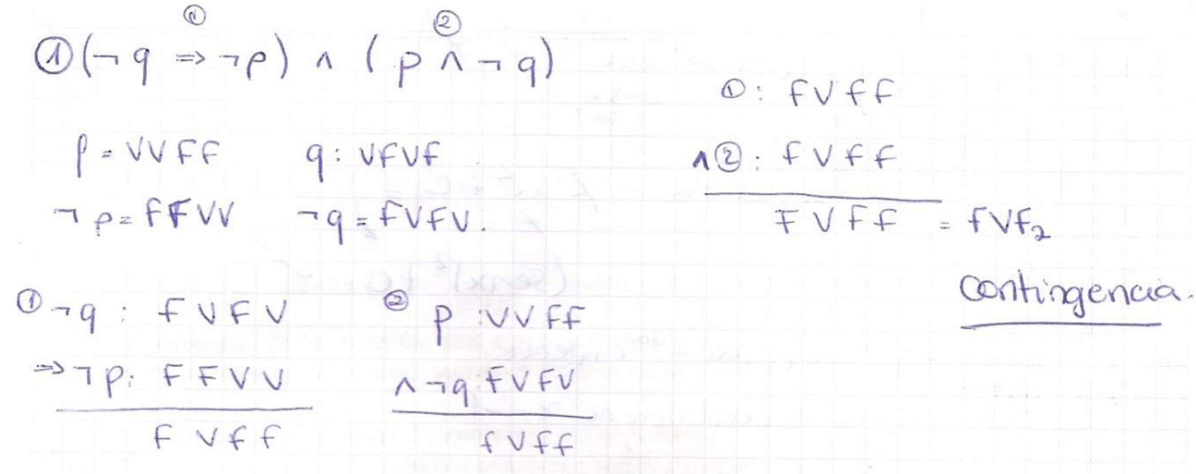
$\wedge: FFFF$

La fórmula es una **contradicción,** es decir, $F$ valoricidad 4.

Se presenta a continuación la respuesta de dos alumnos a un ejercicio de probar la regla de distribución de la conjunción con respecto a la conjunción, formulado en una evaluación parcial:




Otra situación:




## 5. Conclusiones

Presentamos una manera original de escribir los valores de verdad que dimos en llamar modalidad molecular; y de evaluar operaciones proposicionales básicas, que denominamos vertical-posicional-descendente, donde no se hace uso de tablas de verdad.

Esta denominación obedece a la forma en que se opera con las proposiciones, una debajo de la otra y teniendo en cuenta el orden de resolución de las operaciones o nivel de precedencia que también valen para las tablas de verdad.

La modalidad no implica un cambio con relación a las dimensiones semióticas tradicionales del cálculo proposicional, sino que se plantea una forma sencilla y dinámica de escribir, leer y operar con estos objetos de la Lógica Proposicional.

Esta escritura diferente de los valores de verdad y la manera de operar con las proposiciones, permite entre otras cosas un proceso de evaluación más práctico y rápido, que cuando se trabaja con tablas de verdad. Los nuevos resultados obtenidos de su aplicación, tales como la relación entre la disyunción excluyente y el bicondicional y

la relación "complementaria" entre la conjunción y la disyunción, pueden ser más accesibles de reconocerlos empleando la forma que aquí se propone, dado que impactan de un modo directo en la observación y en la lectura de los valores de verdad.
Creemos que a nivel mental, se aprovechan esquemas de operar con números de varias cifras que el alumno ya dispone desde los primeros años de escolaridad, y que se aplica ahora al Cálculo Proposicional.
La escritura que proponemos permite hacer visibles ciertas regularidades presentes en las operaciones proposicionales e invita al alumno a ver qué cosas ocurren más allá de las dos, tres y cuatro proposiciones que se suele considerar de manera tradicional en la enseñanza de estas nociones de Lógica.
Creemos que queda abierta la posibilidad de seguir viendo qué otros beneficios se pueden obtener con esta escritura y la forma de operar vertical descendente.
Estos elementos nos llevan a afirmar que esta nueva notación y realización de operaciones proposicionales, representa una innovación pedagógica, una innovación en la dimensión pragmática de las nociones elementales de la Lógica Proposicional, dado que se propone al docente -y por ende al alumno- una manera nueva y dinámica de trabajar, sin emplear tablas de verdad.

## 6. Referencias

BG Valla, Jr. (1975). Comentario de 'Introducción a la lógica simbólica' John L. Pollock El Journal of Symbolic Logic, 40, pp 101-101. DOI: 10.2307/2272302.
Pollock, J. L.(2001). *Lógic: an introducting to the formal study of reasoning*. University of Arizona. Recuperado en:http://johnpollock.us/ftp/LogicIntroduction/Logic%20text.html. Wittgenstein L. (2003). *Tractatus logico-philosophicus*. Traducción autorizada de la edición publicada por Routledge, sello del grupo Taylor & Francis. Routledge & Kegan Paul, Ltd., Londres. Filosofía Alianza Editorial. ISBN: 978-84-206-5570-3